Труды научно-технической конференции кластера пензенских предприятий, обеспечивающих **БЕЗОПАСНОСТЬ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ.**
Том 10, Пенза-2016, с. 31-34 (http://пниэи.рф/activity/science/BIT/T10-p31.pdf)

УДК: 519.2, 612.087, 621.319.7

Перфилов К.А.

Сравнение мощности критериев среднего геометрического при их интегральном и интегро-дифференциальном исполнении

Наиболее распространенным на практике критерием статистических оценок является хи-квадрат критерий Пирсона [1, 2]. Основной неприятностью критерия является то, что для принятия по нему решений с вероятностью ошибок первого и второго рода $P_1 \approx P_2 \approx P_{EE}$ требуется выборка, состоящая примерно из 400 опытов.

Силами научно-технической общественности этот недостаток старались устранить в течение всего 20 века. Было создано порядка 100 оригинальных статистических критериев, часть из которых стандартизована [3] и обладает большей мощностью, чем хи-квадрат критерий. К сожалению, действительно эффективной замены хи-квадрат критерию пока не найдено.

В данной статье я попытаюсь показать, что синтез статистических критериев высокой мощности может быть осуществлен комбинированием анализа таких статистических характеристик как интегральная функция вероятности и дифференциальная функция плотности вероятности распределения значений. Эта ветвь исследований пока мало изучена.

Два года назад был предложен интегральный статистический критерий среднего геометрического [4, 5], мощность которого выше мощности хи-квадрат критерия. Этот критерий удобен для численной реализации, суть его состоит в вычислении квадрата расхождения экспериментальной функции вероятности P(x) и дополнения теоретической функции вероятности $(1-\widetilde{P}(x))$. Критерий построен на интегрировании произведения функций вероятности:

$$sg^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x)\cdot(1-\widetilde{P}(x))dx \qquad (1).$$

Работа критерия поясняется рисунком 1, где приведены практически вычисленные функции вероятности для тестовой выборки нормально распределенных 36 опытов. Эти функции вероятности построены путем использования программы на языке MathCAD:

$$i := 0..1000($$

$$x_i := \mathrm{sort}(\mathrm{rnorm}(36,0,1))$$

$$D_i := \sum_{j=0}^{36-2} \left| \frac{j+1}{36}\cdot\left[1-\mathrm{pnorm}\left[\frac{\left[(x_i)_{j+1}+(x_i)_j\right]}{2},\mathrm{mean}(x_i),\mathrm{stdev}(x_i)\right]\right]\right| \cdot \frac{\left|(x_i)_{j+1}-(x_i)_j\right|}{(x_i)_{35}-(x_i)_0} \qquad (2).$$

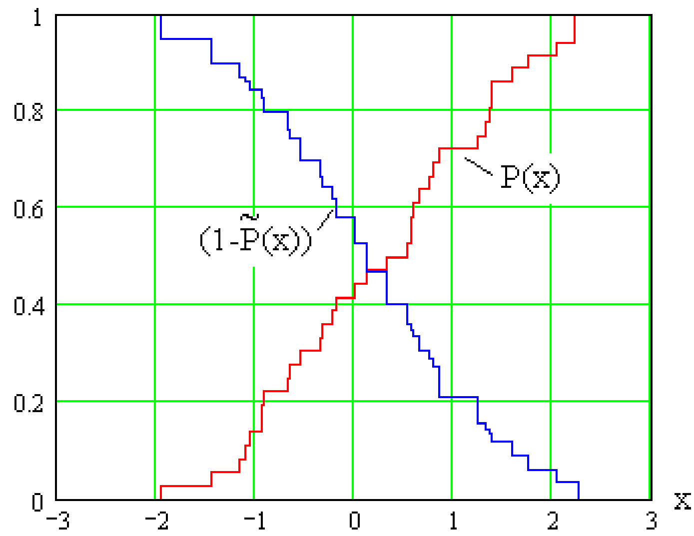

Рис. 1. Две дискретные функции вероятности, построенные для данных эксперимента P(x) и проверяемой гипотезы нормальности $(1-\widetilde{P}(x))$ совпадающие по их стандартному отклонению и математическому ожиданию.

Из рисунка 1 видно, что ширина интервалов квантования данных обеих, использованных функций вероятности одинаковая. По этой причине ошибки квантования, возникающие из-за ограниченного объема исходных данных, компенсируют друг друга [6, 7] и мощность критерия оказывается выше мощности хи-квадрат критерия Пирсона.

Одним из самых простых способов оценки мощности критерия является его настройка на гипотезу нормальности проверяемых данных и последующее альтернативное использование равномерного закона распределения значений. Результаты тестирования приведены на рисунке 2, где заливкой отмечены равновероятные ошибки первого и второго рода $P_1 \approx P_2 \approx P_{EE} \approx 0.223$.

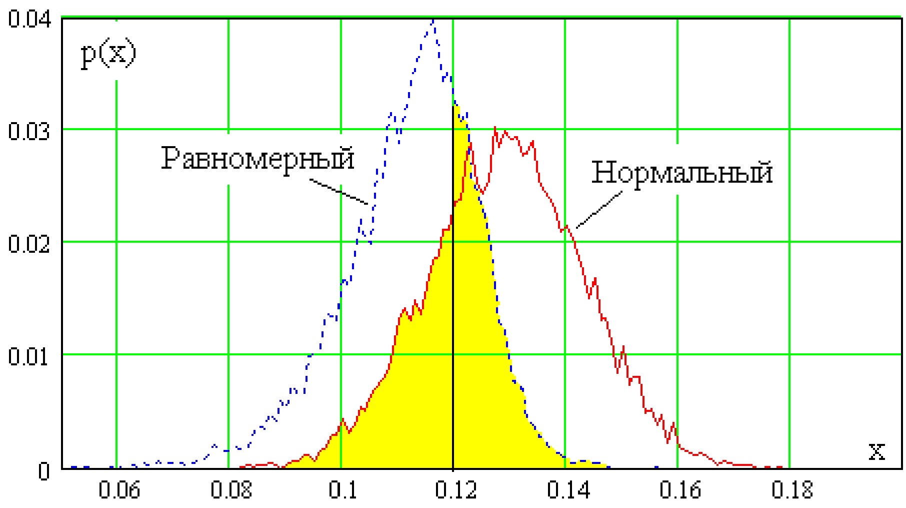

Рис. 2. Распределения данных интегрального критерия (1), полученное программным моделированием (2)

Следует отметить, что критерий (1) может быть модифицирован несколькими способами [7], например, функции вероятности могут быть заменены на функции плотности вероятности. Так же может быть синтезирован гибридный вариант статистического критерия, где заменена только одна из функций:

$$sG^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x) \cdot \tilde{p}(x) \cdot dx \qquad (3).$$

Работа этого функционала поясняется данными, отображенными на рисунке 3.

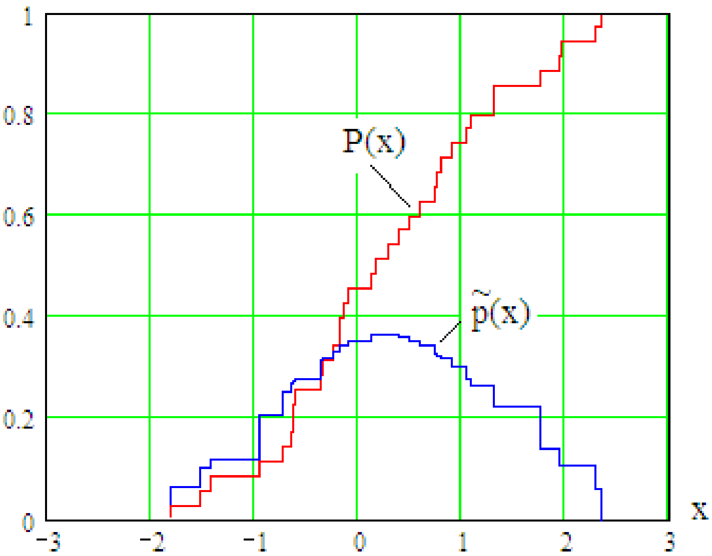

Рис. 3. Примеры использованных при вычислениях функции вероятности – P(x) и соответствующей ей нормальной функции плотности распределения значений - $\tilde{p}(x)$

Функционал, воспроизводящий вычисления (3), реализован программно:

$$i := 0..\,10000$$

$$x_i := \mathrm{sort}(\mathrm{rnorm}(36, 0, 1))$$

$$D_i := \sum_{j=0}^{36-2} \left| \frac{j+1}{36} \cdot \left[\mathrm{dnorm}\left[\frac{\left[\left(x_i\right)_{j+1} + \left(x_i\right)_j \right]}{2}, \mathrm{mean}\left(x_i\right), \mathrm{stdev}\left(x_i\right) \right] \right] \right| \cdot \frac{\left| \left(x_i\right)_{j+1} - \left(x_i\right)_j \right|}{\left(x_i\right)_{35} - \left(x_i\right)_0} \qquad (4).$$

Распределения данных, полученные в результате численного эксперимента, приведены на рисунке 4. Из этого рисунка видно, что равные значения вероятностей ошибок первого и второго рода составляют $P_1 \approx P_2 \approx P_{EE} \approx 0.045$.

Получается, что переход от интегрального критерия среднего геометрического (1) к интегро-дифференциальному его варианту позволяет увеличить мощность примерно в 5 раз.

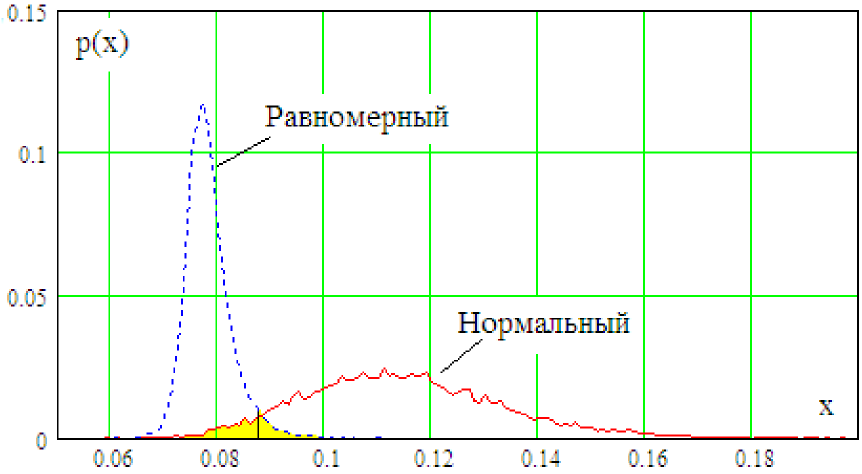

Рис. 4. Распределения значений интегро-дифференциального варианта реализации статистического критерия среднего геометрического

ЛИТЕРАТУРА:

1. Кобзарь А.И. Прикладная математическая статистика. Для инженеров и научных работников. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006 г., 816 с.
2. Р 50.1.037-2002 Рекомендации по стандартизации. Прикладная статистика. Правила проверки согласия опытного распределения с теоретическим. Часть I. Критерии типа $\chi 2$. Госстандарт России. Москва-2001 г., 140 с.
3. Р 50.1.037-2002 Прикладная статистика. Правила проверки согласия опытного распределения с теоретическим. Часть II. Непараметрические критерии. Госстандарт России. Москва-2002 г., 123 с.
4. Перфилов К.А. Критерий среднего геометрического, используемый для проверки достоверности статистических гипотез распределения биометрических данных. Труды научно-технической конференции кластера пензенских предприятий, обеспечивающих БЕЗОПАСНОСТЬ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ. Том 9, Пенза-2014, с. 92-93 (http://www.pniei.penza.ru/RV-conf/T9/C92).
5. Перфилов К.А., Иванов А.И., Проценко Е.Д. Расширение многообразия статистических критериев, используемых при проверке гипотез распределения значений биометрических данных. //«Европейский союз ученых» № 13, 29-30.04.2015, часть 5, с. 9-12.
6. Иванов А.И., Малыгина Е.А., Перфилов П.А., Вятчанин С.Е. Сравнение мощности критерия среднего геометрического и Крамера-фон Мезиса на малых выборках биометрических данных. // Модели, системы, сети в экономике, технике, природе и обществе. №2 2016, с 155-158.
7. Иванов А.И., Перфилов К.А. Оценка соотношения мощностей семейства статистических критериев «среднего геометрического» на малых выборках биометрических данных. // XI Всероссийская научно-практическая конференция. «Современные охранные технологии и средства обеспечения комплексной безопасности объектов. Пенза-Заречный. 20 октября 2016 г., с. 223-229.

Статья поступила 15.09.2016, опубликована 23.09.2016 по положительной рецензии к.т.н. Зефирова С.Л.